LA SCIENCE CONTEMPORAINE

Éléments complémentaires à la Physique quantique

par Henri Duthu

Introduction et sommaire => ICI - textes précédents => **ICI**

COMPLÉMENT À LA MÉCANIQUE QUANTIQUE

Un aperçu de la géométrie symplectique

La géométrie symplectique s'est imposée comme discipline mathématique à part entière vers le milieu du vingtiéme siècle, avec l'apparition de la quantification géométrique, comme préalable à l'élaboration des bases mathématiques des principes de la mécanique quantique. Les objets modernes de cette théorie, comme le groupe symplectique linéaire, les variétés symplectiques, les objets symplectiques fondamentaux : sous-espaces isotropes, lagrangiens, structure symplectique des orbites coadjointes, etc. … sont apparus comme les réponses mathématiques aux constructions nécessaires de la physique du vingtième siècle. Une fois ces objets introduits, l'étude de leurs relations mutuelles a constitué ce que l'on appelle aujourd'hui la géométrie symplectique qui est devenue le cadre par excellence de la mécanique à tel point que l'on peut dire aujourd'hui que ces théories se confondent.

La géométrie symplectique n'est pas seulement le langage de la mécanique, elle en est l'essence et la matière. Une ses difficultés majeures est qu'elle est peu visuelle, comme peut l'être par exemple la géométrie euclidienne, car elle évolue en général en grande dimension. En effet, ses objets ne sont pas du domaine du visible immédiat mais concernent la structure interne, cachée, des choses comme la gravitation, les mécanismes, l'optique, les particules élémentaires et autres. Alors, à titre d'approche, il a été proposé un parallèle qui présente, en quelque sorte, la géométrie symplectique en négatif de la géométrie euclidienne.

La géométrie symplectique n'est pas intuitive au premier abord parce que la notion de distance n'y a aucun sens[1]. Ce que mesure la géométrie symplectique, ce sont des AIRES ; ce fait est bien illustré par l'existence des capacités symplectiques, qui sont des généralisations de la notion d'aire (ou, ce qui revient au même, de la notion d'ACTION si essentielle, tant en physique classique que quantique!)

La géométrie symplectique et le groupe qui lui est associé

De la même manière que le groupe d'Euclide est défini par le groupe des transformations affines qui préservent la distance de Pythagore, le groupe symplectique du plan est défini comme le groupe des transformations affines qui préservent la surface signée des triplets de points ou des couples de vecteurs.

L'aire signée : trois points (A,B,C) du plan définissent un couple de vecteurs (→AB,→AC). Considérons un système de coordonnées orthonormées du plan d'origine A tel que celui de la Fig.1, les deux vecteurs →AB et →AC sont repérés par des couples de nombres, respectivement, (x, y) et (x^1, y^1). La surface signée de ce couple est définie par :

$$S(\vec{AB}, \vec{AC}) = xy' - x'y. \qquad (1)$$

C'est la surface du parallélogramme dont les côtés sont portés par les vecteurs →AB et →AC, elle est dite signée parce qu'elle s'inverse lorsqu'on permute les point B et C : S (→AB,→AC) –S (→AC,→AB). Pour se convaincre que cette formule donne bien l'aire du parallélogramme en question il suffit de se rappeler que l'aire d'un parallélogramme est égal à sa base par sa hauteur. Ensuite, en faisant glisser le parallélogramme le long des directrices pour le transformer en un rectangle appuyés sur les axes, on obtient facilement l'expression annoncée.

[1] Disparition de la distance : puisque tout couple de points non confondus est équivalent à tout autre couple de points non confondus, il n'existe plus de « distance » au sens des orbites des couples de points, par le groupe symplectique affine (qui présente des affinités)..

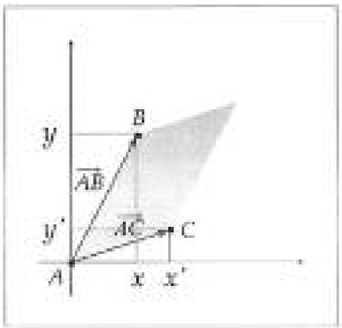


Figure 1: L'aire signée xy'– yx'

Cette opération qui à chaque couple de vecteurs du plan, issus d'une même origine, renvoie l'aire du parallélogramme associé est appelée forme symplectique du plan. Le groupe des transformations linéaires qui préservent cette forme symplectique est appelé groupe symplectique. De la même manière que le groupe des transformations euclidiennes est engendré par les rotations et les translations, le groupe symplectique affine est engendré par les transformations symplectiques linéaires et les translations, les transformations symplectiques linéaires prennent le rôle des rotations.

A/ DEUX SIÈCLES DE GESTATION

Au XVIIe siècle, **Newton** énonce la loi de l'attraction universelle (1687). Cette loi permet de déduire le mouvement relatif d'une planète autour de son étoile, **Kepler** ayant décrit le mouvement elliptique des planètes dès 1611. Encore aujourd'hui, malgré l'avènement de la relativité générale, cette loi de la gravitation universelle est toujours utilisée dans la détection des exoplanètes. Une planète, à l'instar de la Terre, subit la force attractive du Soleil, et son évolution est décrite par l'équation différentielle :

$$d^2 r)/(dt^2)=-\alpha r/r^3$$

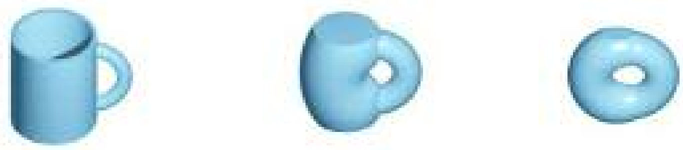
Le problème du mouvement relatif de deux corps en interaction mutuelle est devenu un exercice classique incontournable du premier cycle universitaire. **Newton** lui-même en a donné une solution correcte dans les propositions 57 à 65 de ses Principia. La planète décrit par rapport à l'étoile un mouvement elliptique dont l'étoile est l'un des foyers. Six constantes, dont une constante θ pour décrire la position initiale de la planète, sont nécessaires pour décrire ce mouvement.
Toutefois, cette description oublie la présence d'autres planètes. Le problème à n corps ($n \geq 3$) est autrement plus ardu. Il résiste encore aujourd'hui à trois siècles d'histoire. Aucune solution analytique n'est connue, excepté pour le problème à trois corps, pour lequel on sait déterminer certaines solutions dites « homographiques ».

Au XVIIIe siècle, la mécanique newtonienne et le calcul infinitésimal de **Newton** et **Leibnitz** sont appliqués pour attaquer toutes sortes de problèmes de mécanique céleste et de mécanique des **solides**. La prolifération des équations différentielles et des méthodes de résolutions particulières devenait inquiétante et les calculs de plus en plus longs et pénibles. Il manquait une vision générale et unificatrice.
D'Alembert avait montré que des problèmes de dynamique pouvaient se ramener à des problèmes de statique et **Euler**, en se basant sur les travaux des frères **Bernoulli** (1696), avait introduit un calcul général pour déterminer des **extrema**, non pas de fonctions de nombres, mais de fonctions de fonctions, que l'on appellera par la suite des fonctionnelles. Deux exemples célèbres étant celui des isopérimètres1F2 et de la brachistochrone2F3.

Dans le premier cas, on cherchait la surface maximale pour un périmètre donné (on peut prouver, par exemple, qu'à périmètre égal un carré détermine une plus grande surface qu'un rectangle) et dans le second cas, c'est la recherche de la courbe de descente la plus rapide pour un point pesant. C'est un ***arc de cycloïde****.
Lagrange (1736-1813)**,** à la fin de ce siècle, chercha donc à faire pour la mécanique ce que **Descartes** avait fait pour la géométrie en créant la géométrie analytique. Il donna une formulation générale des équations de la mécanique qui, comme les équations de droite et de plan dans la géométrie de **Descartes**, unifiait nombre de problèmes de mécanique particuliers. Cela uniformisait aussi les méthodes de résolutions de ces problèmes et permettait de démontrer des **théorèmes** de mécanique de façon automatiquement valables pour de larges classes de systèmes mécaniques.
Au final, la mécanique était ramenée à de la géométrie analytique en liaison étroite avec le calcul différentiel et intégral.

B/ LES DERNIÈRES ÉVOLUTIONS : GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE ET TOPOLOGIE SYMPLECTIQUE

Bien qu'elle ait puisé ses sources aux siècles précédents dans les travaux des physiciens **Lagrange** et de Sir William Roman **Hamilton**[4] (1805-1865) sur la mécanique classique, la ***géométrie symplectique***[5] n'a réellement pris forme que vers les années 1960, lorsque des mathématiciens comme Vladimir **Arnold** et Mikhaïl **Gromov** lui ont donné sa forme mathématique actuelle. La ***topologie symplectique*** est encore plus jeune. Elle existe seulement depuis 1985. « La ***topologie symplectique***, selon François **Lalonde** est en quelque sorte le livre dont un des chapitres serait la ***géométrie symplectique***».
La ***topologie*** concerne l'étude des déformations spatiales par des transformations continues. Dans ce type de recherche, il est permis de modifier des objets, sans les rompre. Cette branche des mathématiques permet même de transformer une tasse en tore (en termes mathématiques).



Mais en quoi consistent ces édifices mathématiques ? La ***géométrie symplectique*** n'est qu'une des multiples géométries définies par les mathématiciens modernes. Ici, les notions classiques de la géométrie euclidienne dans le plan que sont le cercle, la distance et les parallèles n'existent plus.
Les triangles, quant à eux, deviennent tous équivalents si leur aire est identique. Cependant, la complexité de cette discipline dépasse rapidement celle des représentations dans le plan. En effet, les mathématiciens généralisent la ***structure symplectique*** à des dimensions supérieures et travaillent le plus souvent dans des espaces de très grandes dimensions, voire de dimensions infinies. Ce sont ces espaces qui permettent, par exemple, de concevoir et

---

2 Isopérimètres : figures planes dont le circuit est égal. De toutes les figures isopérimètres, le cercle est celle qui a le plus de surface.
3 Le problème brachistochrone : On cherche à déterminer la trajectoire la plus rapide permettant à une masse ponctuelle uniquement soumise à la gravité d'aller d'un point A à un point B.
4 ***Dynamique hamiltonienne*** (la mécanique classique, des systèmes dynamiques de points matériels à l'optique géométrique).
5 Symplectique vient du grec Zvfurlcypa, qui signifie entrelacement (complexus en latin).

d'exprimer mathématiquement des théories comme celle des supercordes, dans laquelle les particules de matière sont remplacées par de microscopiques cordes vibrantes.
La ***topologie***, quant à elle, s'intéresse à définir ce qu'est un espace et quelles en sont les propriétés. Les topologues travaillent à classer les différents espaces, en plus d'en étudier les déformations et les invariants. Par exemple, topologiquement parlant, un cercle est équivalent à une ellipse, le premier pouvant donner le second, simplement par étirement. De même, en trois dimensions, une sphère est équivalente à un ellipsoïde.
Tous ces concepts mathématiques sont sans aucun doute d'une esthétique fascinante, mais à quoi peuvent-ils bien servir ? En réalité, la ***géométrie symplectique*** est le cadre idéal de la mécanique classique, mais aussi de bien des domaines de la physique d'aujourd'hui, comme la relativité générale et la mécanique quantique.
Elle permet de solutionner des problèmes tel celui du mouvement d'une planète sous l'influence de ses sœurs et du Soleil (problème à *n* corps), ceux impliquant des espaces courbes ou à géométrie complexe – comme c'est le cas de notre univers, dont Einstein a prédit une courbure non nulle – ou encore, des systèmes dynamiques, tel que l'on en trouve en dynamique des fluides.

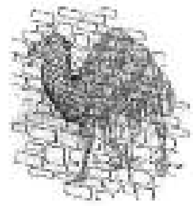
Le chameau symplectique

Maurice **de Gosson** a été le premier à prouver que le théorème de non-serrrement (*non-squeezing*) de Mikhail **Gromov** (aussi appelé « le principe du chameau symplectique ») a permis de dériver un ***principe d'incertitude***[6] classique – formellement et totalement similaire, aux relations d'incertitude **Robertson-Schrödinger**[7] (cf. les inégalités de **Heisenberg** (1927) – dans une forme plus forte où les covariances sont prises en compte).
Selon les propres termes de Maurice de Gosson :
« La géométrie symplectique est le langage de la mécanique classique dans sa formulation hamiltonienne, et joue également un rôle crucial dans la mécanique quantique. La géométrie symplectique était insoupçonnée jusqu'à 1985, lorsque le mathématicien **Gromov** découvrit une propriété étonnante et inattendue des transformations canoniques: le ***théorème de non-serrement*** (non-squeezing). Le résultat de Gromov, surnommé « ***Principe du chameau symplectique*** », semble à première vue être une partie abstruse des mathématiques. Il s'avère avoir des conséquences fondamentales et insoupçonnées – interprétations de la mécanique classique et de la mécanique quantique, parce qu'elle est essentiellement une forme classique du ***principe d'incertitude***. Le lecteur est ainsi invité à un voyage qui l'emmène du théorème de non-serrement de **Gromov** au ***principe d'incertitude quantique***. »[8]
Ce résultat assez inattendu a été discuté dans les médias.

---

[6] En mécanique quantique, le **principe d'incertitude** ou **principe** d'indétermination, aussi connu sous le nom de **principe d'incertitude** de Heisenberg, désigne toute inégalité mathématique affirmant qu'il existe une limite fondamentale à la précision avec laquelle il est possible de connaître simultanément deux propriétés.
[7] La relation de Schrödinger-Robertson fournit une équation d'incertitude pour tout couple d'observables ne commutant pas.
[8] Introduction à l'article : The symplectic egg in classical and quantum mechanics [Maurice A. de Gosson University of Vienna, Faculty of Mathematics, NuHAG, Nordbergstr. 15, 1020 Vienna, Austria(Received 14 September 2012; accepted 29 January 2013)]

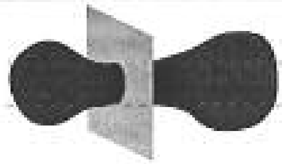
Théorème du chameau symplectique.
"Il est plus facile à un chameau de passer par le trou d'une aiguille qu'à un riche d'entrer dans le royaume de Dieu." (Marc 10 :25)
Chameau : $B^{2n}(R)$
Aiguille : $H_r = \{x_1 = 0\} \setminus B^{2n}(r)$.



Théorème (chameau symplectique)

Pas de déformation symplectique faisant passer $B^{2n}(R)$ de l'autre côté de H_r si $R > r$.

Enoncé semble plus fort,
mais mêmes techniques.



Les gouttes quantiques (Blobs Quantum)

En 2003, Maurice de **Gosson** a introduit la notion de ***gouttes quantiques***, qui sont définies en termes de capacités symplectiques. Peu de temps après, il a montré que le théorème de **Gromov**[9] (non-serrement) permet à un grainage grossier de ***l'espace de phase***[10] par ces ***gouttes quantiques*** (ou cellules quantiques symplectiques), chacune décrite par une dynamique moyenne et une position moyenne.
La ***goutte quantique*** est l'image d'une balle de l'espace de phase avec un rayon $\sqrt{\hbar}$ par une transformation (linéaire) symplectique et les ***gouttes quantiques*** sont les plus petites unités d'espace de phase compatibles avec ***le principe d'incertitude*** de la mécanique quantique. Leur propriété d'invariance distingue les ***gouttes quantiques*** de **De Gosson** des « cellules quantiques » connues dans la thermodynamique.
Avec G. **Dennis** et Basil **Hiley**, Maurice de **Gosson** a présenté des exemples de la façon dont la ***goutte quantique*** peut être considérée comme l'explosion d'une particule (blow-up) dans l'espace de phase. Ils ont montré que cette explosion requiert une énergie interne qui provient de la particule elle-même, impliquant l'énergie cinétique et le ***potentiel quantique*** * de David Bohm[11]. Dans la limite classique, la ***goutte quantique*** devient une particule ponctuelle. La notion de Maurice de **Gosson** de ***gouttes quantiques*** a donné lieu à une proposition pour une nouvelle formulation de la mécanique quantique.

---

9 (a) En géométrie symplectique, le **théorème de non-serrement de Gromov**, affirme l'impossibilité de plonger de manière symplectique une boule de rayon R dans un cylindre de rayon $r < R$.

10 L'**espace** des **phases** en mécanique analytique est un **espace** à 2M dimensions permettant d'interpréter géométriquement le mouvement d'un système.

10 Dans cette théorie, les particules sont accompagnées d'une onde qui guide leur chemin, d'où le terme d'onde pilote. Mathématiquement, l'***onde pilote*** est définie de la même façon que la fonction d'onde de la mécanique quantique. L'influence de l'onde pilote se caractérise sous la forme d'un ***potentiel quantique***, dérivé de la fonction d'onde, agissant sur la particule de la même façon qu'un champ électrique. Par conséquent, l'***onde pilote*** gouverne le mouvement de la particule en suivant l'équation de Schrödinger.